PROYECTO INTEGRADOR DE MATMATICA

AÑO: 2°3

PROFESOR: ADRIAN OTERO

ACTIVIDAD 1 Números enteros y racionales. Propiedades de la potenciación y radicación.

ACTIVIDAD 2 Geometría. Lugar geométrico, triángulos y cuadriláteros: características, propiedades, construcción, bisectriz y mediatriz. Teorema de Pitágoras.

ACTIVIDAD 3 Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

ACTIVIDAD 4 Estudio de funciones, ejes coordenados.

ACTIVIDAD 5 Gráficos de funciones, noción de variable dependiente e independiente, interpretación de tablas y gráficos.

Van a encontrar las definiciones y conceptos teóricos para llevar adelante cada actividad.

ACTIVIDAD 1

NUMEROS ENTEROS Y RACIONALES.

PROPIEDAD DE LA POTENCIACION Y LA RADICACION

Historia de la potenciación

Arquímedes, el padre de la notación científica. El primer intento de representar números demasiado grandes fue emprendido por el matemático y filósofo griego Arquímedes, descrito en su obra El contador de Arena en el siglo III a. C. Ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo. El número estimado por él era de 1063 granos.

Nótese la coincidencia del exponente con el número de casilleros del ajedrez sabiendo que para valores positivos, el exponente es n-1 donde n es el número de dígitos, siendo la última casilla la Nº 64 el exponente sería 63 (hay un antiguo cuento del tablero de ajedrez en que al último casillero le corresponde -2 elevado a la 63- granos). A través de la notación científica fue concebido el modelo de representación de los números reales mediante coma flotante. Esa idea fue propuesta por Leonardo Torres Quevedo (1914), Konrad Zuse (1936) y George Robert Stibitz (1939).

Aunque no es 100 por ciento seguro, parece que la idea de elevar al cuadrado o al cubo se remonta hasta el tiempo de los babilónicos. Babilonia era parte de Mesopotamia en la zona que ahora consideramos como Irak. La primera mención conocida de Babilonia se encuentra en una tablilla que data del siglo XXIII a.C. Y lo cierto es que aún así ellos estaban lidiando con el concepto de los exponentes, a pesar de que su sistema de numeración (el sumerio, que ahora es una lengua muerta) utilizaba símbolos para descomponer fórmulas matemáticas. Curiosamente, no sabían qué hacer con el número 0, de modo que lo delineaban como un espacio entre los símbolos.

La palabra en sí misma proviene del latín "expo", que significa "fuera de", y "ponere", que significa "lugar". Si bien la palabra exponente pasó a significar cosas diferentes, el primer uso moderno registrado de exponente en matemáticas fue en un libro llamado "Integra Arithemetica", escrito en 1544 por el autor inglés y matemático Michael Stifel. Pero él simplemente estaba trabajando con una base de dos, de modo que, por ejemplo, el exponente 3 significaba que la cantidad de números 2 que tendrías que multiplicar para obtener 8. Lo que se vería así: $2^3 = 8$. El método de Stifel se diría que es un poco retrógrado en comparación con la forma en que pensamos acerca del tema hoy. Él diría que "el 3 es la configuración del 8". Pero hoy en día, nos referimos a eso simplemente como una ecuación de 2 al cubo. Hay que recordar que él estaba trabajando exclusivamente con una base o un factor de 2 y traduciendo del latín un poco más literalmente de lo que hacemos actualmente.

¿Qué es una potencia?

La potenciación es la operación matemática que nos dice que un número llamado **base**, es multiplicado consigo mismo una cantidad de veces llamada **exponente**.

$$a^n$$

La expresión de arriba se lee "**a elevado a la n**", y a su vez, equivale matemáticamente a la igualdad de abajo:

$$a^n = a.a.a.a \ldots . (n\ veces)$$

Por ejemplo:

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

c) $4^0 = 1$ (este es un caso especial, ya que no podemos multiplicar un número por sí mismo 0 veces)

d) $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

e) $1^9 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

La notación tipográfica usada por convención para denotar la potenciación, es la siguiente: **a^n**. Por lo que, si necesitas buscar información sobre el tema, o la resolución de un ejercicio, es así como vas a encontrar los mejores resultados.

Cabe destacar, que hay dos números particulares, que al funcionar de exponentes, la expresión toma un nombre específico. Estos son: 2 y 3.
Por lo que, si una base, está elevada a un exponente 2, se lee 2 **al cuadrado**. De igual manera, las bases elevadas a un exponente 3, se leen **al cubo**.

Es decir: 5^2 es 5 al cuadrado; y 5^3 es 5 al cubo.

Matemáticamente hablando, la potenciación es un tema de gran peso teórico, por lo que, adquirido éste conocimiento.

Concepto Importante

Existe un concepto evidente en la potenciación que es muy importante de recalcar: si $a^2 = a * a$, y basándonos en que toda **multiplicación** entre **números positivos** da como resultado, otro número **positivo**, podemos afirmar que:

- **Todo número elevado a un exponente par, da como resultado otro número par**
  Este axioma es muy usado en la matemática, y sobre todo, en su caso más simple: **bases elevadas al cuadrado**.
  Es más, esto es tan importante, que fue un factor que dio origen a la necesidad de los números **complejos** (pero eso no es un tema que nos compete ahora).
- **Todo número negativo elevado a un exponente impar, da como resultado otro número impar.**
- **Todo número negativo elevado a un exponente par, da como resultado otro número par.**

Elemplos:

$2^8 = 256$

$(-2)^8 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 256$

$-2^8 = -\ 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -256$

Dicho esto, pasamos a lo importante.

Propiedades

Siempre que estés cerca de las matemáticas, estarás relacionado con este tema, por lo que, aprende bien las propiedades que te van a servir toda tu vida.

Producto de potencias de igual base: Como bien dice su nombre, si dos bases son iguales (el mismo número o variable), y son los factores de una multiplicación, ambas bases quedan en una sola y sus exponentes son sumados.

$$a^n . a^m = a^{n+m}$$

Para mí, junto con la que viene, es la más importante de todas, porque siempre está y porque a veces simplifica expresiones que parecen muy difíciles de trabajar.

Cociente de potencias de igual base: Acá las bases, que nuevamente deben ser iguales, son parte de una división. Como antes, nos quedamos con una sola base, y ahora sus exponentes se restan.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Nota: Tener en cuenta que a veces hay que aplicar las propiedades de derecha a izquierda, es decir, no estar solo atentos a que si tenemos un producto de potencias de igual base, hay que sumar los exponentes, sino que también, si tenemos una base elevada a una suma, estas habilitado a separar esa suma como exponente.

Nota²: Éstas propiedades toman fuerza cuando los exponentes(o las bases) no pueden ser trabajadas directamente, es decir, son variables de una ecuación o son números irracionales como (**e** o **π**). Ya que si son números normales, directamente se calcula el resultado de dicha expresión.

Por estos motivos, tener muy presente cuando se vean situaciones como las siguientes:

$$e^{x+3} = e^x . e^3$$

Potencia de otra potencia: Así nada más, tenemos una base elevada a un exponente, y todo eso a su vez, elevado a otro exponente.
En estos casos, los exponentes se multiplican entre sí, y obtenemos como siempre, una sola base elevada al producto de dicha multiplicación.

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

Nota: Como antes, tener en cuenta el camino inverso también. Muy útil para las ecuaciones de temática exponencial.

$$64 = 2^6 = a^{2.3} = (2^2)^3$$

Potencia de exponente negativo: En estos casos, se obtiene el inverso de la expresión. Es decir, si tenemos una fracción, intercambiamos numerador por denominador (la damos vuelta); y si tenemos un entero, ese número se transforma en el denominador de una fracción cuyo numerador es 1. Luego, elevamos la fracción entera al exponente en cuestión.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

$$a^{-1} = \frac{1^1}{a}$$

Potencia de exponente cero: Cuando una base está elevada a 0, el resultado siempre es 1.

$$a^0 = 1$$

Distributividad de la potencia: La potencia es distributiva solo con respecto a la multiplicación y la división. No así respecto a las sumas y resta, lo que es un error muy común y muy grave.

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

En otra ocasión veremos qué pasa cuando los números a y b se relacionan mediante una operación suma o resta.

Estas fueron las propiedades de la potenciación, recuerden tenerlas siempre presente, porque aunque no parezca, serán necesarias en cualquier momento que dependa de resoluciones de nivel aritmético.

NO distributiva respecto a la suma y a la resta

No se puede distribuir cuando dentro del paréntesis es suma o resta:

Por ejemplo:

$(6 + 3)^2 \neq 6^2 + 3^2$ porque $(6 + 3)^2 = 9^2 = 81$

$6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$

$81 \neq 45$

$(10 - 6)^2 \neq 10^2 - 6^2$ porque $(10 - 6)^2 = 4^2 = 16$

$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$16 \neq 64$

Ejercicios

Resolvé las siguientes potencias utilizando las propiedades:

a) $-2^2 =$

b) $(3^5)^0 =$

c) $(-2)^0 =$

d) $(-4)^2 =$

e) $3^5 . 3^2 =$

f) $(-7)^0 . (-7)^5 =$

g) $2^4 . 2^1 .2^2 =$

h) $x^4 . x^{10} =$

i) $5^6 : 5^2 =$

j) $[(-2)^3]^2 =$

k) $(-2)^{12} : (-2)^{10} =$

l) $[(-5)^1]^3 =$

La radicación es la operación “contraria” a la potenciación.

Por ejemplo para averiguar $\sqrt{9} = 3$ (raíz cuadrada de nueve) se busca qué número elevado al cuadrado da 9.
$\sqrt{9} = 3$ porque $\sqrt{9} = 3$

En el ejemplo anterior, el 9 se llama radicando, el 2 índice y el resultado 3, raíz.

La definición formal de esta operación es la siguiente:

Si n es un número natural, se dice que el número entero a es la raíz enésima del número entero b, si b es la potencia enésima de a. Es decir:

$\sqrt[n]{b} = a$ Si y solo si $a^n = b$

Veamos otros ejemplos:

$\sqrt[3]{27} = 3$ Porque $3^3 = 27$

$\sqrt[4]{81} = 3$ Porque $3^4 = 81$

$\sqrt{121} = 11$ Porque $11^2 = 121$

Veamos que sucede cuando el radicando es un número negativo:

$a)\ \sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = -8$

$b)\ \sqrt[5]{-243} = -3$ ya que $(-3)^5 = -243$

$c)\ \sqrt[4]{-81} = ?$

En el último ejemplo se debería buscar un número elevado "a la cuatro" que de como resultado -81, ¿existirá algún número que cumpla esa condición?

Si recordaste lo estudiado cuando se trabajó con la operación de potenciación, tu respuesta debería ser negativa, no existe ningún número entero que cumpla esa condición.

En general: cuando el índice e par y el radicando un número negativo, el resultado no existe en el conjunto de los números enteros.

Propiedades de la radicación

La radicación es en realidad otra forma de expresar una potenciación: la raíz de cierto orden de un número es equivalente a elevar dicho número a la potencia inversa. Por esto, las propiedades de la potenciación se cumplen también con la radicación. Para que estas propiedades se cumplan, se exige que el radicando de las raíces sea positivo.

Raíz de un producto

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Ejemplo

- $\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2^4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$

Se llega a igual resultado de la siguiente manera:

$$\sqrt{3^2 \cdot 2^4} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12.$$

Raíz de un cociente

La raíz de una fracción es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplo

- $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz(de la misma forma que potencia de otra potencia) se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Ejemplo

- $\sqrt[9]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[27]{5}.$

Potencia de exponente fraccionario

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3}$

Potencias de exponente fraccionario negativo

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

$2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{2^3}}$

Resolver las siguientes raíces

$\sqrt[3]{-125} =$

$\sqrt{100} =$

$\sqrt[3]{8} =$

$\sqrt{25} + \sqrt[3]{-64} =$

$\sqrt[3]{-64} + \sqrt[5]{-32} =$

Nota: por si hace falta aclarar, cuando no aparece el índice de la raíz $\sqrt{b}$ el índice es 2 por lo tanto seria $\sqrt[2]{b}$

Resolver los siguientes ejercicios combinados:

$a)$ $[(-1).(5)+(-3)^3]\left(\sqrt[3]{-27}\right)(2^2) - (84) =$

$b)$ $\sqrt{7.3^2+1} + \left(\frac{-14}{5} + 3\right)^{-2} =$

$c)$ $\frac{1}{5}\left[1 + \frac{3}{5} - (-1)^2\right] - \left[2 + 5\left(\frac{2}{8} - 1\right)\right]$

Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)$ $\left(\frac{1}{3}\right)^2 x - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$b)\quad (-9x+1).(-1)^3 = \sqrt{9-7x}$

c) $\quad -\frac{5}{4}-\frac{2}{5} = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 x$

$d)\quad \frac{3}{5}x-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{10}x - \sqrt[2]{\frac{16}{25}} =$

ACTIVIDAD 2

GEOMETRIA

INTRODUCCION

El origen se la geometría se remonta al antiguo Egipto. Las inundaciones que provocaban las crecidas del rio Nilo borraban los límites de los terrenos de cultivos. De este modo, cuando el agua bajaba era necesario volver a delimitar el terreno. Los cálculos que se implementaban no eran precisos, pero si lo suficientemente aproximados para responder a las necesidades de la vida cotidiana.

En el siglo VI a.c. , el matemático griego tales de Mileto viajo a Egipto, donde adquirió los conocimientos de los egipcios y los llevo a Grecia.

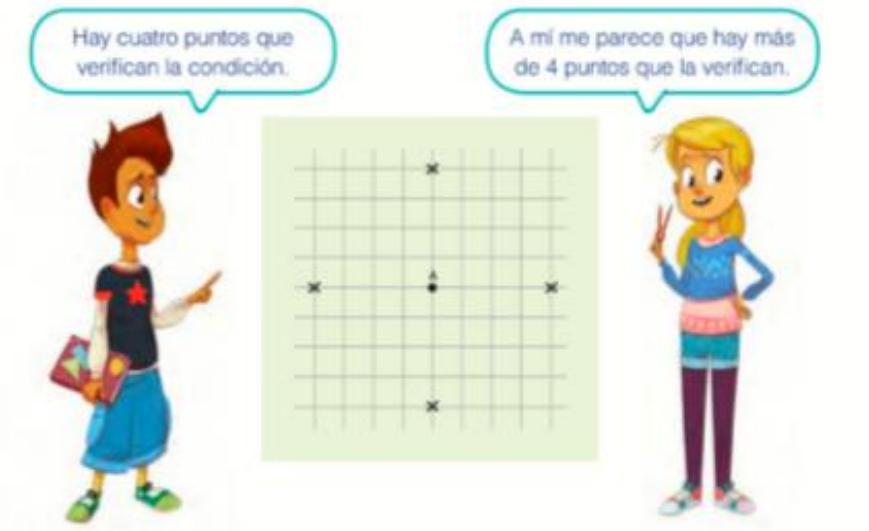
Euclides, un matemático griego discípulo de Platón que vivió en la ciudad de Alejandría alrededor del año 300 a.c. , escribió la obra fundamental GEOMETRIA DE LOS ELEMENTOS, donde se exponen las bases esenciales de la geometría.

Aunque la mayor parte de los teoremas pertenecen a otros autores, el mérito de su obra fue compilar todos los conocimientos desarrollados desde la época de Yales.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Se llama **lugar geométrico** al conjunto de todos los puntos del plano que cumplen cierta condición.

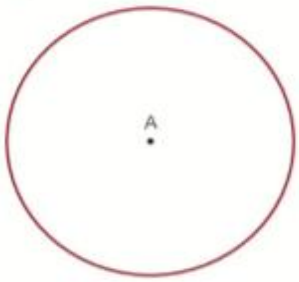
1. Lean qué dicen Julián y Natalia para marcar todos los puntos que estén a 2 cm del punto A. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?



La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto dado. Este punto recibe el nombre de **centro** de la circunferencia.
Todos los segmentos con extremo en el centro y cualquier punto de la circunferencia se llaman **radios**. Los segmentos que unen dos puntos de la circunferencia y pasan por el centro se llaman **diámetros**.
Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos que están a menor o igual distancia del centro que el radio.

2. ¿Qué condición cumplen el conjunto de puntos señalado con color en cada uno de estos casos?

a.

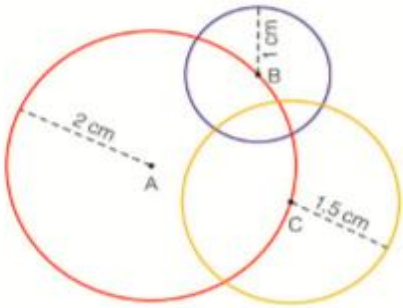


b.

c.

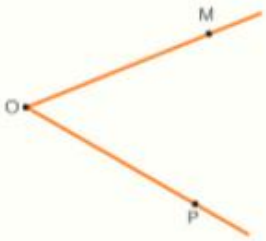
3. Marquen un punto P.
a. Señalen con rojo el lugar geométrico de los puntos del plano que están a 4 cm de P.
b. Señalen con verde el lugar geométrico de los puntos del plano que están a menos de 4 cm de P.
c. ¿Qué figura quedó dibujada en cada uno de los ítems anteriores?

4. a. Marquen un punto que esté a menos de 2 cm de A y a más de 1,5 cm de C.
b. Marquen un punto que esté a más de 2 cm de A, a menos de 1 cm de B y a menos de 1,5 cm de C.



5. Bisectriz de un angulo

Sigan las instrucciones para construir la figura.



1. Trazar una circunferencia con centro O y radio menor que $\overline{OM}$.
2. Llamar A y B a los puntos donde la circunferencia interseca a los lados del ángulo.
3. Trazar la circunferencia con centro en A que pasa por B y la circunferencia con centro en B que pasa por A. Llamar E al punto en que se intersecan las circunferencias y está más cerca de M y P.
4. Trazar la semirrecta con origen en O que pasa por E.

6. mediatriz de un segmento

Sigan las instrucciones para construir la figura.

1. Construir un segmento $\overline{AC}$.
2. Abrir el compás con una medida mayor que la mitad del segmento y trazar una circunferencia con centro en A y ese radio y otra con centro en C y el mismo radio.
3. Llamar B y D a los puntos donde se cruzan las circunferencias.
4. Trazar la recta que pasa por B y por D.

6. Decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen por qué.

a. Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, entonces son congruentes.

b. Dos triángulos que tienen los tres ángulos congruentes, son congruentes.

c. Si los lados de dos triángulos miden lo mismo, entonces son congruentes.

d. Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes, entonces el tercer lado también medirá igual en los dos triángulos.

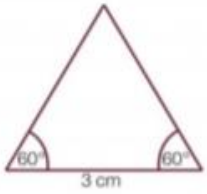
e. Si en dos triángulos, dos ángulos y el lado adyacente a ellos son respectivamente congruentes, entonces son congruentes.

7. ¿Cuáles de estos triángulos son congruentes? ¿Cómo pueden estar seguros?

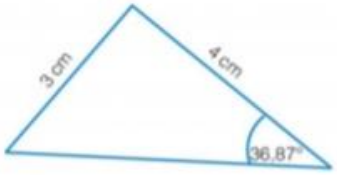
- Dos **segmentos** se llaman **congruentes** si tienen la misma longitud.
- Dos **ángulos** se llaman **congruentes** su tienen la misma amplitud.
- Dos **triángulos** se llaman **congruentes** cuando sus tres lados y sus tres ángulos son congruentes.

a.

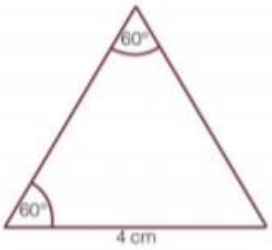
b.



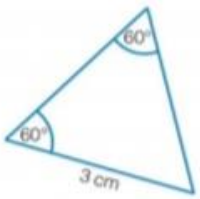
c.



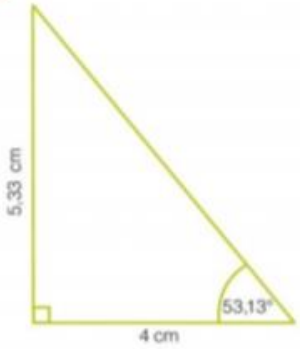
d.



e.



f.

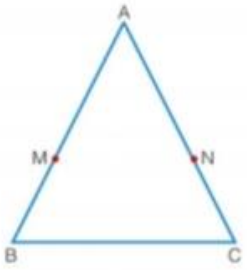


8. ¿Es cierto que todos los triángulos equiláteros son congruentes? ¿Por qué?

9. ¿Es cierto que si dos triángulos rectángulos tienen los dos catetos congruentes siempre son congruentes? Expliquen cómo se dan cuenta.

10. ¿Es cierto que si dos triángulos rectángulos tienen un cateto y la hipotenusa respectivamente congruentes entonces son congruentes? ¿Por qué?

11. El triángulo ABC es isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$ y $\overline{AM} = \overline{AN}$. ¿Son congruentes los triángulos ACM y ABN? ¿Cómo pueden estar seguros?



Los triángulos

Los triángulos se clasifican, según sus lados, en **equiláteros, isósceles** o **escalenos**; y según sus ángulos, en **acutángulos, rectángulos** u **obtusángulos**.

1. a. Construyan usando solo regla, compás y transportador, triángulos con los datos que se dan a continuación. Anoten los pasos que siguen y escriban cuántos se pueden construir con esos datos. Si no es posible, expliquen por qué.

i. Lados de 4 cm, 6 cm y 5 cm.

ii. Lados de 9 cm, 2 cm y 5 cm.

iii. $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm y $\hat{B} = 100°$.

iv. $\overline{AB} = 6$ cm, $\hat{B} = 80°$, $\hat{A} = 100°$.

v. $\overline{AB} = 5$ cm, $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 40°$.

vi. $\overline{AB} = \overline{BC} = 6$ cm, $\hat{B} = 80°$.

vii. $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, $\hat{A} = 60°$.

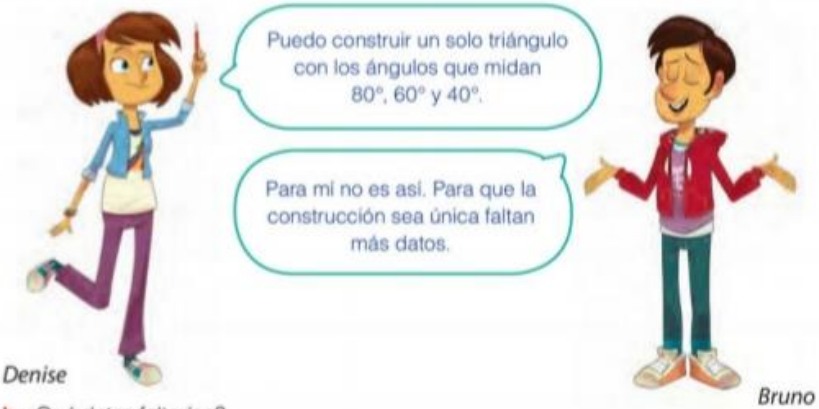
viii. $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 70°$, $\hat{C} = 60°$.

b. ¿Es cierto que no se puede construir ningún triángulo con los datos de **ii.**? ¿Por qué?

2. Martín dice que puede construir infinitos triángulos isósceles con dos lados de 4 cm. Ariel, en cambio, dice que pudo construir uno solo. Ezequiel opina que para la construcción, Ariel tuvo que poner un ángulo entre los lados. ¿Quién les parece que tiene razón? ¿Por qué?

3. ¿Cuántos triángulos se pueden construir con todos los lados de 5 cm y un ángulo de 70°? ¿Por qué?

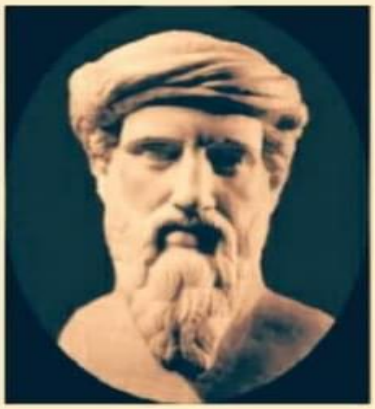
4. a. Lean qué dicen Denise y Bruno.



b. ¿Qué datos faltarían?

5. Construyan un triángulo que tenga un lado de 3,5 cm y los dos ángulos apoyados en él de 80° y 40°. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con esos datos? ¿Cómo pueden estar seguros?

Teorema de Pitágoras



PITÁGORAS

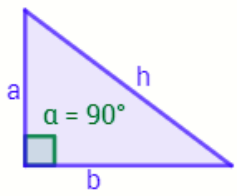
Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), Vivió inmediatamente después de Tales. Fundó la escuela pitagórica (Sur de Italia), organización que se guiaba por el amor a la sabiduría y en especial a las Matemáticas y a la Música.

Después el pueblo se rebeló contra ellos y quemó su sede. Algunos dicen que el propio Pitágoras murió en el incendio. Otros, que huyó y, desencantado, se dejó morir de hambre.

Además de formular el teorema que lleva su nombre, inventó una tabla de multiplicar y estudió la relación entre la música y las matemáticas.
A partir de la Edad Media, el teorema de Pitágoras fue considerado como el "pons asinorum", el puente de los asnos, es decir, el conocimiento que separaba a las personas cultas de las incultas.

Este teorema establece que **la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa**:

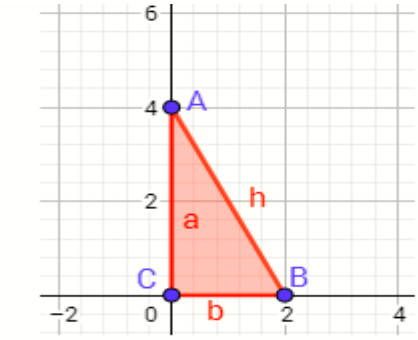
Recorda que un triángulo es rectángulo cuando uno de sus ángulos interiores es recto (90 grados) y que la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.



$$h^2 = a^2 + b^2$$

Ejemplo:

En el siguiente triángulo, ¿cuál de los lados es la hipotenusa y cuál es el ángulo recto?



Los catetos son los lados a y b. La hipotenusa es el lado h. El ángulo recto es el ángulo que forman ambos catetos.

Para calcular la longitud de la hipotenusa, aplicamos Pitágoras. Los catetos miden a=2y b=4, con lo que

$$h^2 = 2^2 + 4^2$$
$$h^2 = 4 + 16$$
$$h^2 = 20$$

Finalmente, hacemos la raíz cuadrada:

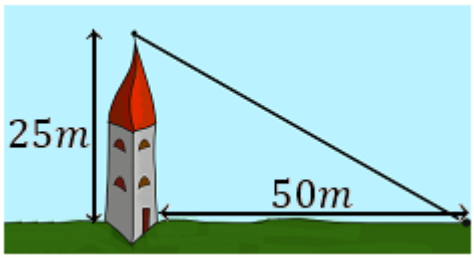
$$h = \sqrt{20}$$

Simplificamos el resultado escribiendo el radicando como un producto y aplicando la propiedad de que la raíz de una producto es el producto de las raíces de sus factores:

$$h = \sqrt{4 \cdot 5} =$$
$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} =$$
$$= 2\sqrt{5}$$

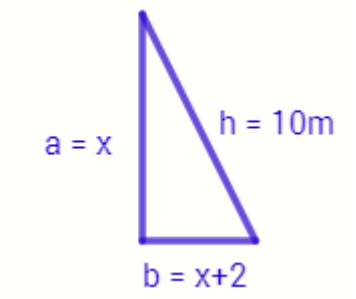
Si aproximamos, h≃4,47.

Ejercicio 1:



Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?

Ejercicio 2: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 metros y sus catetos miden x y x+2



¿Cuánto miden los catetos?

Problema 3:

Si el cateto de un triángulo rectángulo mide x y el otro mide el doble, obtener una fórmula para calcular la longitud de la hipotenusa en función del cateto menor, x.

Utilizar la fórmula obtenida para calcular la hipotenusa cuando $x=\sqrt{5}$ y $x=2\cdot\sqrt{5}$

Circunferencias y círculos:

Lugar geométrico: se llama lugar geométrico al conjunto de todos los puntos del plano que cumplan con cierta condición.

Circunferencia: es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto llamado centro de circunferencia.

Todos los segmentos con un extremo en el centro de circunferencia se llaman **radio**.

Los segmentos que unen dos extremos de la circunferencia y pasan por el centro se llaman **diámetro**.

Los segmentos que unen dos puntos de la circunferencia sin parar por el centro se llaman **cuerdas**.

Se llama **círculo** al conjunto de todos los puntos que están a una distancia menor e igual distancia del centro.

Triángulos:

El triángulo es un polígono de tres lados.

Los triángulos se clasifican según sus lados, en **equiláteros** (todos sus lados son congruentes), **Isósceles**(un par de lados congruentes y uno distinto), **escaleno**(sus tres lados son distintos); y según sus ángulos, **acutángulo**(sus tren ángulos miden menos de 90°), **rectángulo**(uno de sus angulos mide 90°), y **obtusángulo**(uno de sus ángulos mide más de 90°)

Desigualdad geométrica: en todo triangulo la suma de dos lados, cuales quiera, es siempre mayor a la medida del tercero.

Congruencia

Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.

Dos ángulos se llaman congruentes si tienen la misma amplitud.

Dos triángulos se llaman congruentes cuando sus tres lados y sus tres ángulos con congruentes.

También vimos que:

Para que dos triángulos sean congruentes, alcanza con que sepamos que:

Tienen tres lados iguales.

Tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos congruente.

Tienen dos lados y los ángulos adyacentes al mismo congruentes.

Mediatriz:

La **mediatriz de un segmento** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de sus extremos.

También podemos decir que **la mediatriz de un segmento** es la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.

Bisectriz:

La **bisectriz de un ángulo** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.

También podemos decir que la **bisectriz de un ángulo** en la semirrecta con origen en el vértice del ángulo que lo divide a este en dos partes iguales.

La **distancia entre dos puntos y una recta** es la longitud del segmento perpendicular a la recta con un extremo en dicho punto.

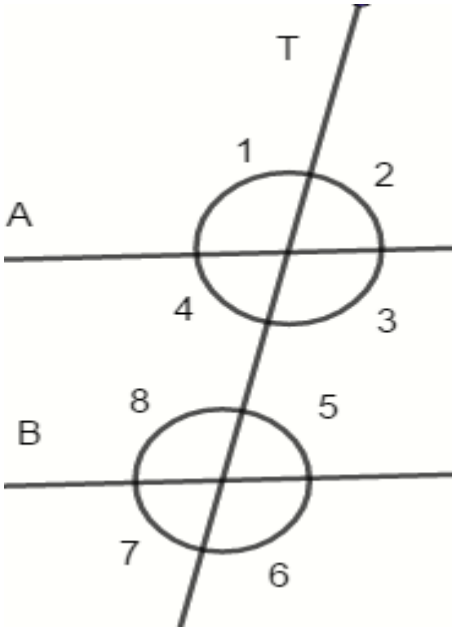
La **distancia entre dos puntos** cualesquiera del plano es la medida del segmento que une.

ACTIVIDAD 3

ANGULOS DETERMINADOS POR DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL

Al cortas dos rectas con una tercera quedan determinados 8 ángulos. Para ello primero debemos de recordar que: una recta es transversal a otra si estas se cortan en un solo punto.

Lo que vamos a analizar son las posiciones relativas de los ángulos respecto de DOS RECTAS PARALELAS cortadas por una TRANSVERSAL.



Consideremos las rectas A y B de forma que A//B y una recta T transversal.

ANGULOS COLATERALES: son aquellos que se encuentran en un mismo semiplano (lado) con respecto de la transversal T.

Por un lado tenemos 1, 4, 8 y7 y por otro 2, 3, 5 y 6.

ANGULOS INTERNOS: son los ángulos que están en la intersección de los semiplanos con respecto a una de las rectas que incluye a la otra.

Son los ángulos 4, 8, 3 y 5.

ANGULOS EXTERNOS: son los que no son internos.

Son los ángulos 1, 2, 7 y 6.

ANGULOS CERRESPONDIENTES: son aquellos ángulos que siendo colaterales, uno es interno y el otro externo y no adyacente.

Son los ángulos 2y5; 3y6; 1y8; 4y7.

ANGULOS ALTERNOS INTERNOS: Los que no siendo colaterales, son los dos internos y no adyacentes.

Son los ángulos 4 y 5; 3 y 8.

ANGULOS ALTERNOS EXTERNOS: los que no siendo colaterales, son los dos externos y no adyacentes

Son los ángulos 1 y 6; 2 y 7.

ANGULOS CONJUGADOS INTERNOS: los que son colaterales y los dos internos

Los ángulos son 4 y 8; 3 y 5.

ANGULOS CONJUGADOS EXTERNOS: Los que son colaterales y los don externos 1 y 7; 2 y 6.

CARACTERISTICAS DE LOS ANGULOS:

CORRESPONDIENTES: Los ángulos son congruentes (iguales)

ALTERNOS INTERNOS: los ángulos son congruentes (iguales)

ALTERNOS EXTERNOS: los ángulos son congruentes (iguales)

CONJUGADOS INTERNOS: Los ángulos son suplementarios

CONJUGADOS EXTERNOS: los ángulos son suplementarios

OTRAS DEFINICIONES:

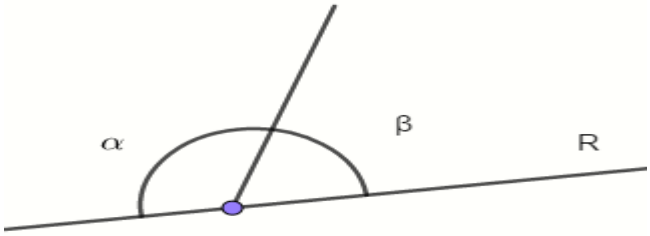
PLANO: el plano es un conjunto infinito de puntos.

Como ejemplo uno podría pensar en un pizarrón sin bordes, extremadamente grande o una mesa lisa extremadamente grande.

SEMIPLANOS: Es un sub conjunto del plano. Esto quiere decir que es una parte del plano el cual fue dividido por una recta.

CONGRUENCIA DE ANGULOS: dos ángulos son congruentes si tienen la misma amplitud.

ANGULOS ADYASCENTES: son aquellos ángulos que tienen un vértice común y un lado y los otros dos lados son semirrectas opuestas



Los ángulos $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\beta}$ son adyacentes. La suma mide 180°

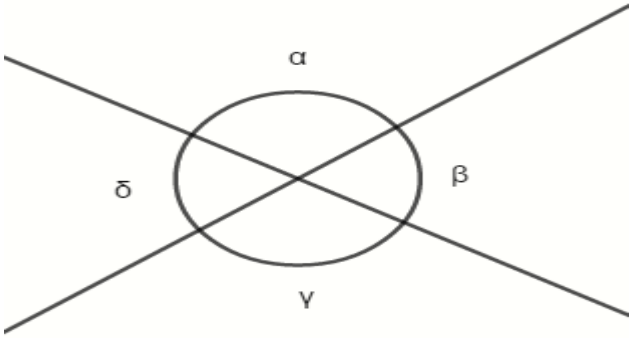
ANGULOS SUPLEMENTARIOS. Dados dos ángulos se dicen suplementarios cuando su suma es igual a 180°

ANGULOS COMPLEMENTARIOS: dados don ángulos se dicen complementarios su suma es igual a 90°.

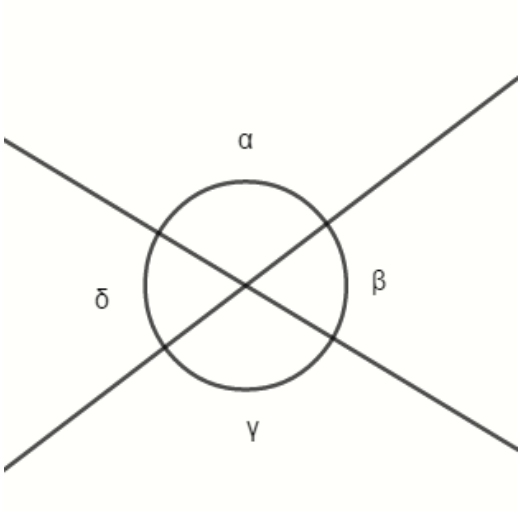
ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE: son aquellos ángulos donde comparten el vértice y sus lados son las semirrectas opuestas a los otros ángulos.

Los ángulos $\widehat{\alpha}\ y\ \hat{\gamma}$ son opuestos por el vértice.

Los ángulos $\widehat{\delta}\ y\ \hat{\beta}$ son opuestos por el vértice.



Ejercicios



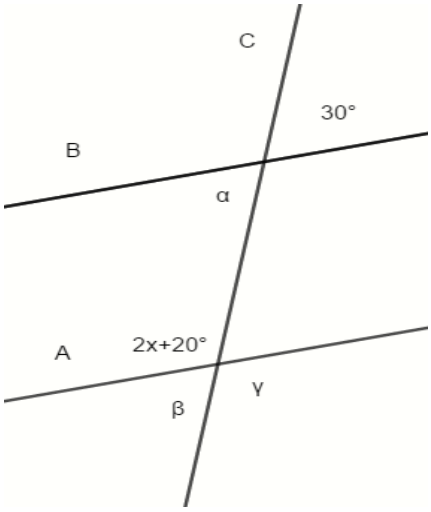
1)

DATOS:

$\alpha = 35° \; y \; \beta = 2x + 50°$

Calcular el valor de x, γ, δ, β

Justificar



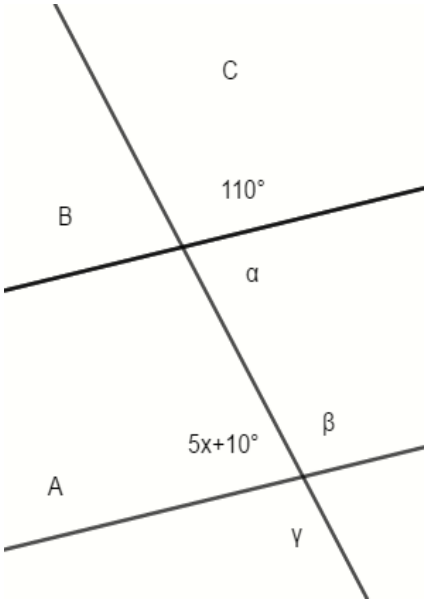
2)

DATOS:

Sea la recta A//B y transversal C

Calcular el valor de x, α, β, γ

Justificar



3)

DATOS:

Sea la recta A//B y transversal C

Calcular el valor de x, α, β, γ

Justificar

ACTIVIDAD 4

FUNCIONES

Estudio de Funciones

Este artículo fue publicado en el diario *ABC* de Madrid el 22/2/2006.

Intentan subastar 21 tablas sumerias y babilónicas de varios expolios de Irak

La Brigada de Patrimonio Histórico de la Comisaría General de Policía Judicial ha recuperado 21 tablillas mesopotámicas elaboradas en terracota, así como un collar con cuentas de lapislázuli y oro. Las investigaciones realizadas han constatado que las piezas proceden de centros patrimoniales del sur de Irak. Se trataría, por tanto, del tráfico ilícito con objetos fruto de expolios realizados durante la reciente guerra —y la posguerra— sufrida por el país.

Sobre la antigüedad de lo decomisado, aún no se sabe todo con concreción. Algunas de las piezas más codiciadas eran las tablillas cuneiformes que relataban la historia de la Creación y de una inundación.

Los babilonios vivieron en Mesopotamia, en las fértiles tierras situadas entre los ríos Tigris y Éufrates, hacia finales del cuarto milenio antes de Cristo. Basaron sus forma abstracta de escritura en signos cuneiformes, plasmados en tablas de arcilla mojada que cocían al sol. Gracias a que muchas de ellas se han conservado hasta nuestros días, se tiene conocimiento de la matemática babilónica.

Uno de los aspectos más notables de la capacidad de los babilonios para los cálculos fue la construcción de tablas para ayudar a calcular y fueron pioneros en la medición del tiempo.

CARLOS HIDALGO

Estas tablillas eran unas tablas con los cuadrados y cubos de los números enteros. Los babilónicos usaban esta fórmula para multiplicar dos números

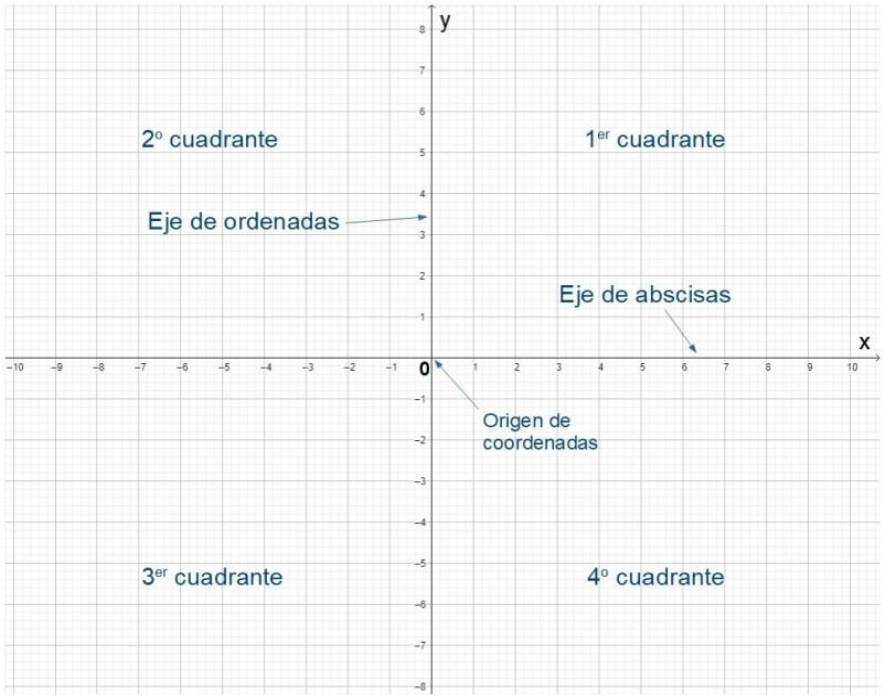
$$a.b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

Ejes de coordenadas o ejes cartesianos en el plano

Para representar puntos del plano utilizamos lo que conocemos como **ejes cartesianos** o **ejes de coordenadas**.

La denominación de «cartesiano» se introdujo en honor al matemático y filósofo francés **René Descartes,** (1596-1650) que fue quien utilizó este sistema por primera vez de manera formal.

Los **ejes cartesianos** o **ejes de coordenadas** son dos rectas perpendiculares entre sí graduadas, una horizontal y otra vertical.



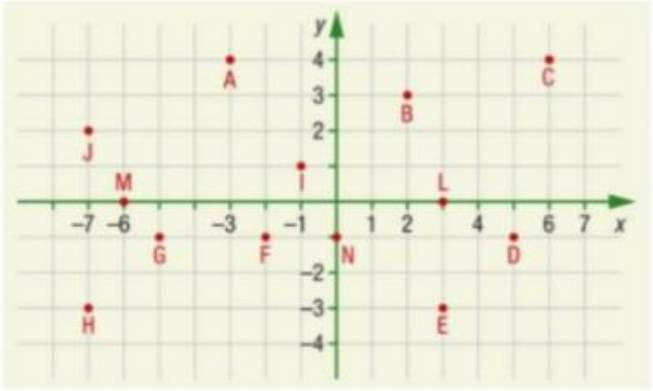
El eje horizontal o **eje *X*** se llama **eje de abscisas**, y el eje vertical o **eje *Y*** se llama **eje de ordenadas**.

Ambos ejes se cortan en un punto que se denomina **origen de coordenadas**, y que se representa con ***O***.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro regiones o **cuadrantes**, tal y como se muestra en la imagen anterior, numerándose en sentido anti horario.

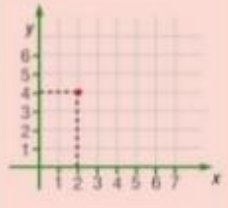
Ubicar puntos en el plano

1. a. Lean qué dice Natalia para indicar las coordenadas de los puntos marcados.



b. Escriban las coordenadas de los otros puntos.

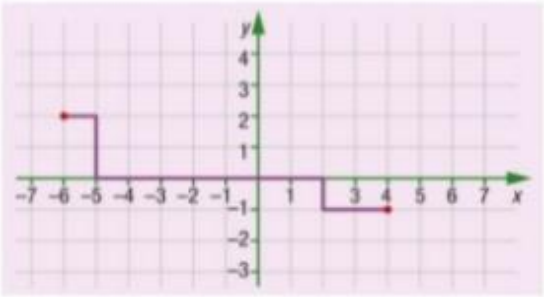
Para ubicar puntos en el plano es necesario usar dos referencias. Cada una se llama **coordenada**.
La primera coordenada suele marcarse en el eje horizontal y se la denomina **coordenada *x*** o **abscisa**. La otra coordenada es la **coordenada *y*** u **ordenada** y se marca en el eje vertical. La ubicación del par (*a* ; *b*) está determinada por la intersección entre la ubicación *a* en el eje *x* y la ubicación *b* en el eje *y*. Por ejemplo si el par es (2 ; 4):



2. Ubiquen estos puntos en un sistema de ejes coordenados.

A = (–1 ; 2)	B = (4 ; –3)	C = (0 ; 1)	D = (–3 ; 0)
E = (0 ; 0)	F = (–3 ; –5)	G = (–2 ; 4)	H = (5; –3)

3. El recorrido dibujado en el sistema de ejes coordenados para ir del punto (–6 ; 2) al (4 ; –1) se indica de la siguiente forma: (–6 ; 2), (–5 ; 2), (–5 ; 0), (2 ; 0), (2 ; –1), (4 ; –1). Escriban otros tres recorridos que partan de (–6 ; 2) y lleguen a (4 ; –1).



4. Marquen el punto A = $\left(-\frac{1}{2} ; 5\right)$ en un sistema de ejes cartesianos.
a. Marquen otro punto que esté a la misma distancia que A del eje *y*.
b. Marquen otro punto que esté a la misma distancia que A del eje *x*.

5. ¿Cómo pueden hacer para marcar todos los puntos que están a 3 unidades de distancia del eje *x*? ¿Cuántos hay?

6. ¿Cómo pueden hacer para marcar todos los puntos que están a 5 unidades de distancia del eje *y*? ¿Cuántos hay?

Leer información

1. En un recipiente se coloca un poco de agua y se la pone a calentar durante 30 minutos. El gráfico muestra la temperatura del agua en función del tiempo desde que se pone el recipiente al fuego.

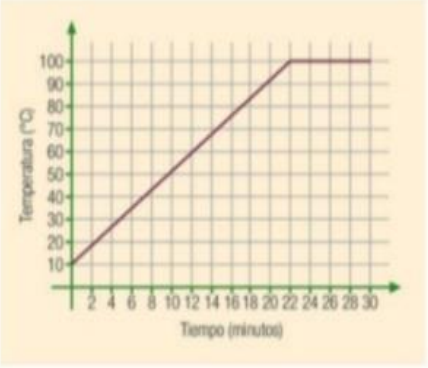
a. ¿Cuál es la temperatura del agua cuando se la pone al fuego?

b. ¿Cuál es la temperatura del agua a los 10 minutos de poner el agua al fuego?

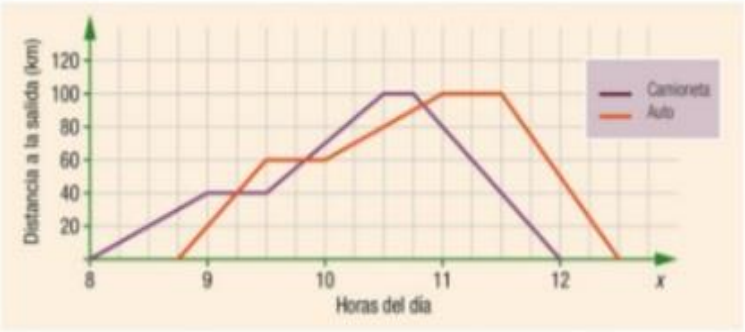
c. ¿En qué momento la temperatura era de 90 °C? ¿Cómo se dan cuenta?

d. El agua hierve a los 100 °C. ¿ Cuánto tiempo transcurre hasta que hierve el agua?

e. ¿Qué ocurre a partir de ese momento?



2. Una camioneta y un auto circulan por la misma ruta. En este gráfico se representa la distancia al kilómetro 0, a la que se encuentran en diferentes momentos de un día.



Un **intervalo** es un conjunto de valores entre dos números determinados. Por ejemplo, el intervalo entre −2 y 5, está formado por todos los números entre −2 y 5. Este intervalo se escribe (−2 ; 5) si no incluye al −2 y al 5, y [−2 ; 5] si los incluye.

Contesten estas preguntas y escriban qué observaron para contestar.

a. ¿A qué hora sale el auto? ¿Y la camioneta?

b. ¿Cuánto tiempo indica cada cuadrito en el eje horizontal?

c. ¿En qué momento el auto pasa a la camioneta?

d. ¿Quién llega antes al kilómetro 100? ¿Por qué?

e. ¿A qué hora regresa al punto de partida cada vehículo?

f. ¿En qué momentos el auto y la camioneta están detenidos?

3. Este gráfico muestra la captura de merluza en un país entre 2009 y 2017. Contesten las preguntas. Expliquen qué hacen para contestar.

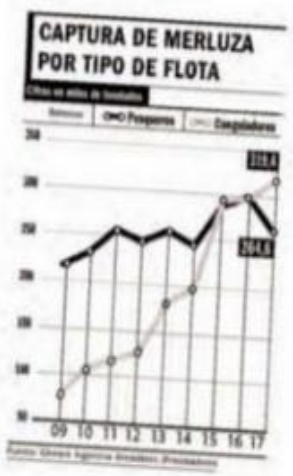
a. ¿En qué años los pesqueros capturaron más de 250 mil toneladas?

b. ¿En qué período el aumento de la captura en los congeladores fue mayor?

c. ¿En qué años los congeladores capturaron más que los pesqueros?

d. ¿En qué períodos los pesqueros disminuyeron la captura?

e. ¿En qué años se produjo la mayor y menor captura de los pesqueros y de los congeladores y de cuántas toneladas fue?



El siguiente es el mismo grafico ampliado para que se vea mejor.

Nota: Como verán en el ejercicio aparecen dos definiciones, **coordenada**, que hace referencia a un punto e **intervalo**, que hace referencia a un conjunto de puntos. Es importante la interpretación de dichos conceptos a la hora de resolver un ejercicio pues ambos de escriben de la misma forma (a;b) y llegado el caso el intervalo tiene las variantes con corchetes.

Intervalo

Un subconjunto de la recta real se llama intervalo, y contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos.

Geométricamente los intervalos corresponden a segmentos de recta, semirrectas o la misma recta real.

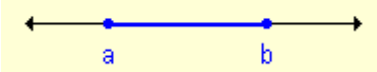
Los intervalos de números correspondientes a segmentos de recta son intervalos finitos, los intervalos correspondientes a semirrectas y a la recta real son intervalos infinitos.

Los intervalos finitos pueden ser cerrados, abiertos o semiabiertos.

Sean a y b dos números reales tales que a < b.

Intervalo cerrado

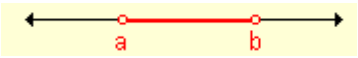
Es el conjunto de números reales formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos.



[a, b] = { x / a ≤ x ≥b}

Intervalo abierto

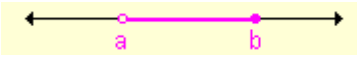
Es el conjunto de los números reales comprendidos entre a y b. que no incluyen a **a** y **b**



(a, b) = {x / a < x < b}

Intervalo semiabierto a izquierda (o semicerrado a derecha)

Es el conjunto de números reales formado por b y los números comprendidos entre a y b.



(a, b] = {x / a < x ≤ b}

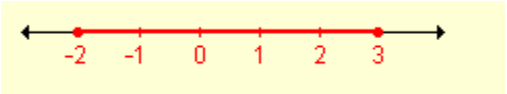
Intervalo semiabierto a derecha (o semicerrado a izquierda)

Es el conjunto de números reales formado por a y los números comprendidos entre a y b.

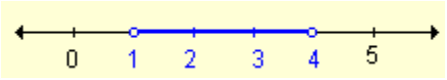
[a, b) = { x / a ≤ x < b}

Ejemplo. Interprete gráficamente los intervalos: **a)** [-2, 3] **b)** (1, 4)

a) El intervalo [-2, 3] comprende todos los números reales entre -2 y 3. Como es cerrado incluye los extremos. Su representación gráfica es:



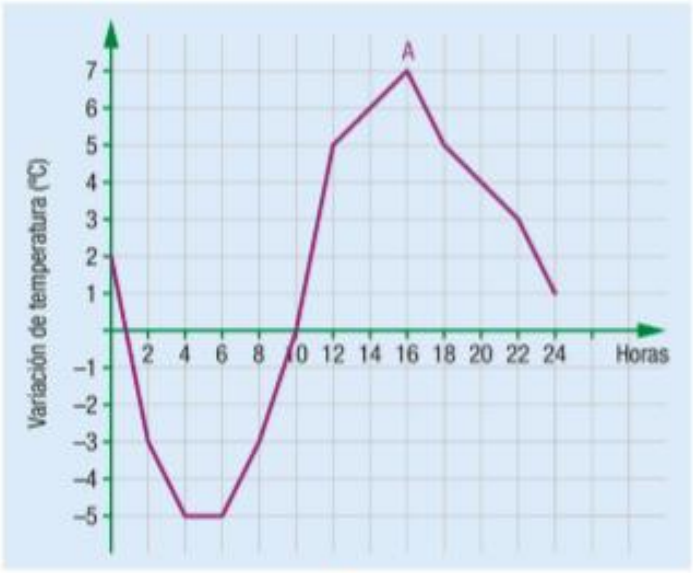
b) El intervalo (1, 4) corresponde a todos los números reales entre 1 y 4. Es abierto pues no incluye a los extremos. Gráficamente:



ACTIVIDAD 5

FUNCIONES, INTERPRETACION DE GRAFICOS

1. La temperatura media registrada en el mes de agosto de 2017 en la ciudad de Magdalena fue de 6 °C. Este gráfico muestra la variación respecto de esa temperatura durante el 6 de agosto de 2017.



a. ¿Qué información da el punto A que está marcado en el gráfico?

b. ¿Cuál fue la temperatura a las 0 horas? ¿Y a las 10 horas?

c. ¿A qué hora la temperatura era de 6 °C? ¿Y de 7 °C? ¿Y de 5 °C? ¿Dónde observan estos datos en el gráfico?

d. ¿Cuáles fueron, ese día, la temperatura máxima y mínima? ¿En qué momento se registraron?

e. ¿En qué momentos del día la temperatura fue mayor a 4 °C?

f. ¿En qué período del día subió la temperatura? ¿En qué período bajó? ¿En qué períodos se mantuvo constante?

g. ¿En qué período del día hubo temperaturas por debajo de 0 °C?

h. Completen la tabla con las temperaturas que se registraron el 6 de agosto.

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (°C)													

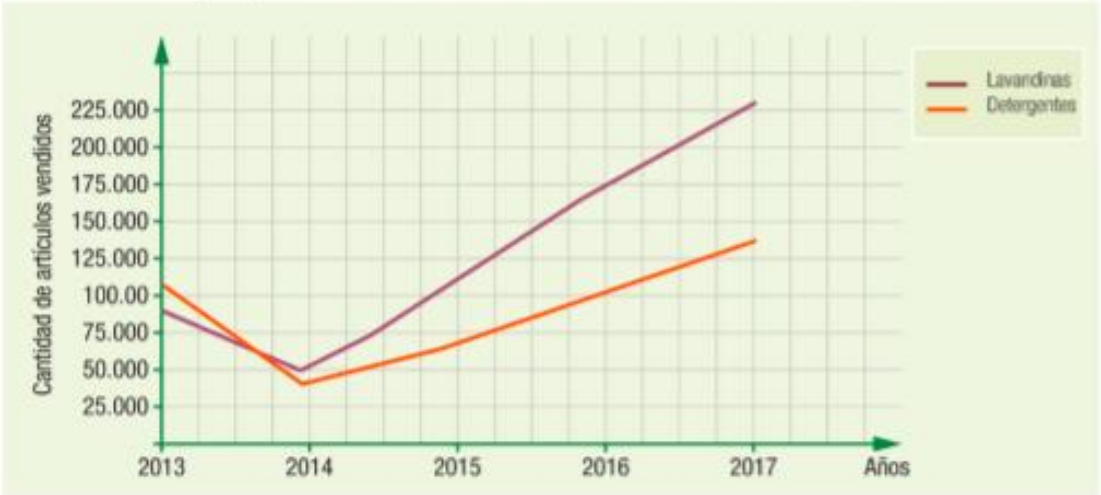
2. En una empresa de fabricación de artículos de limpieza analizan las ventas de lavandina y detergente en el período 2013-2017.

a. ¿En qué período la venta de detergentes disminuyó?

b. ¿En qué año se produjo la menor venta de lavandina?

c. En el período 2015-2017, ¿el crecimiento de la venta de qué artículo fue mayor? ¿Cómo se dieron cuenta?

d. ¿En qué años la cantidad de artículos vendidos fue menor que 150.000?



3. Este gráfico indica la variación de la producción industrial, en diferentes rubros, en 2017, respecto del año 2016.

a. ¿Qué información da el 8,1 en la barra del vidrio?

b. ¿Cómo piensan que decidieron el tamaño de las barras?

c. ¿En qué rubro se produjo la mayor baja?

d. ¿En qué rubro se produjo el mayor aumento?

e. ¿Qué indican los datos negativos?

f. ¿En qué rubros la disminución fue menor del 10%?

4. En el gráfico se muestran las distancias a la que se encuentra Mario de su casa cuano se dirige a la plaza. En el esquema se indica el camino por el que va con la bicicleta.

Contesten las preguntas y expliquen qué miraron para contestar.

a. ¿Cuánto tarda en llegar a la parte más alta del camino?

b. ¿Cuánto tarda en llegar a la plaza?

c. ¿A qué distancia está la plaza de su casa?

d. ¿Cuánto tiempo se queda en la plaza?

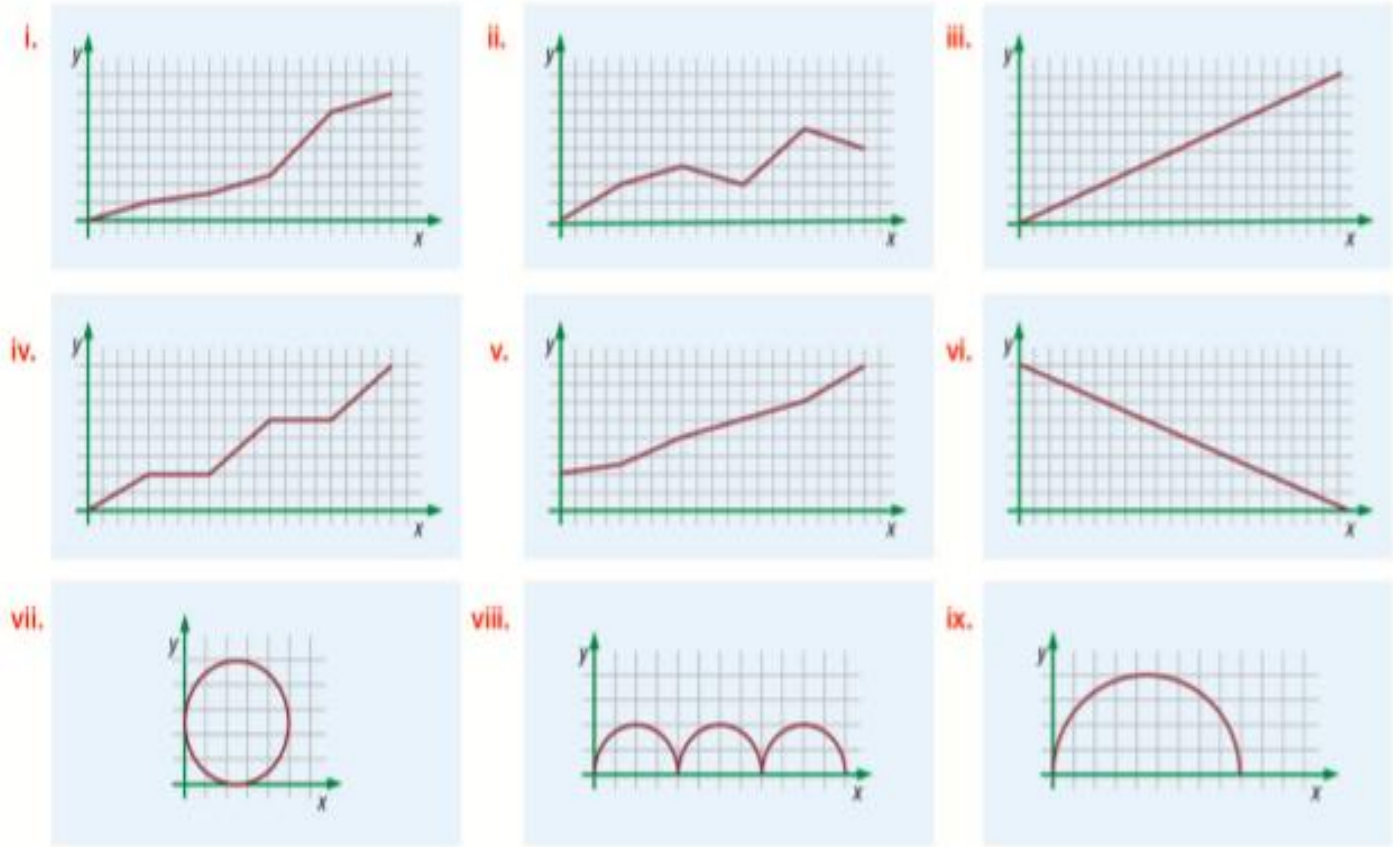
e. En el camino de ida, ¿por qué si de los 1.600 m a los 2.000 m el camino es en bajada, el gráfico es en subida?

f. Marquen en el gráfico el tramo que representa la vuelta a su casa.

g. ¿Cuánto tarda en volver a su casa? ¿Por qué?

h. En la vuelta, ¿qué sucede a 2.000 m de su casa?

5.a. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la distancia recorrida por un chico que anda en bicicleta por una pista circular? Expliquen cómo lo pensaron.



b. ¿Qué unidades se le pueden colocar a los ejes coordenados?

c. si el chico va siempre a la misma velocidad, como sería el grafico si ¿da una vuelta?, si ¿da dos vueltas?

TABLAS Y GRAFICOS

Una **variable** es una letra que representa cualquier valor dentro de un conjunto de números.

1. En una librería venden anotadores a $2,50 cada uno.

a. Completen la tabla.

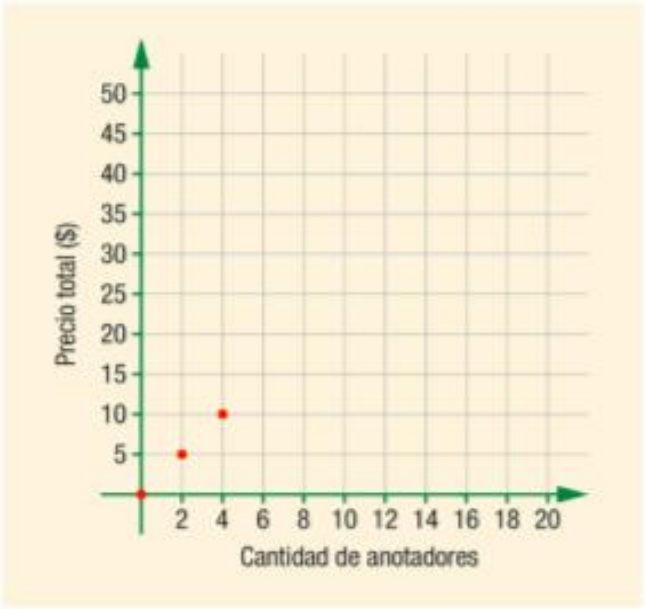
Cantidad de anotadores	1	2	4	8	10	12	15	20
Precio a pagar ($)								

Cuando la variable que se grafica en el eje horizontal puede tomar valores intermedios entre los números enteros, tiene sentido unir los puntos que se colocan en un sistema de ejes cartesianos. Si los valores que toma son finitos o solo son números enteros, no tiene sentido unirlos. Sin embargo, en algunas ocasiones los puntos se unen para poder analizar la tendencia.

b. En este gráfico se ubicaron algunos puntos de la tabla anterior. Completen los que faltan.

c. ¿Tiene sentido unir los puntos graficados? Expliquen cómo lo pensaron.

d. ¿Cuántos anotadores se pueden comprar con $20? ¿Y con $22? ¿Por qué?



2. En una dietética venden harina integral a $12,50 el kilogramo.

a. Completen la tabla.

Cantidad de harina (kg)	1	2	4	8	10	12	15	20
Precio a pagar ($)								

b. Representen los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos.

c. ¿Tiene sentido unir los puntos graficados? Expliquen cómo lo pensaron.

d. Escriban la cuenta que pueden hacer para calcular el precio que hay que pagar si conoce la cantidad de kilogramos que se compran.

e. ¿Cuántos kilogramos de harina pueden comprar con $275? ¿Y con $148,75? ¿Por qué?

3. La verdulería de la feria tiene la siguiente oferta:

a. Completen la tabla.

Cantidad de verdura (kg)	1	2	3	5	8	10	11	14
Precio total ($)								

b. Martina dice que hay dos maneras de completar los 3 kg. ¿Qué piensan?

Noción de función

Una **función** es una relación en la que **"a cada elemento de la variable independiente le corresponde un único elemento de la variable dependiente"**

Las **variables dependientes e independientes** son las dos variables principales de cualquier experimento o investigación.

La **variable independient**e es aquella que cambia o es controlada para ver cuáles son sus efectos en la variable dependiente.

La **variable dependiente** es la variable que se investiga o se miden.

Por ejemplo: del ejercicio 2 de tablas y gráficos. Los kilogramos de harina integral son la **variable independiente**, y el precio a pagar es la **variable dependiente**. Porque el precio depende de la cantidad de kilogramos que venda.

Entonces a esta relación de "por cada kilogramo de harina voy a pagar una determinada cantidad de dinero" se lo llama función.

Así mismo puedo encontrar otros ejemplos como: la distancia recorrida por un auto en función del tiempo empleado…etc.